CHAPITRE 4

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE DU PLAN

Résumé

Ce chapitre est souvent délaissé par les élèves au concours. Lors des épreuves écrites, il est souvent demandé certaines propriétés après avoir étudié une courbe.
Ce chapitre repose sur les bases connues des années précédentes, en les consolidant.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant le produit scalaire :
- Connaître les définitions de produit scalaire . . . . . . □
- Savoir déterminer une mesure d'angle entre deux vecteurs à l'aide du produit scalaire . . . . . . □

② Concernant le déterminant :
- Connaître la notion de déterminant et les différentes définitions. . . . . . . □
- Savoir utiliser le déterminant pour déterminer l'aire d'un parallélogramme . . . . . . □

③ Concernant les droites :
- savoir déterminer les équations cartésiennes de droite . . . . . . □
- savoir déterminer un système d'équations paramétriques de droite . . . . . . □
- savoir déterminer les intersections éventuelles de deux droites . . . . . . □
- savoir déterminer la distance d'un point à une droite . . . . . . □

④ Concernant les cercles :
- savoir déterminer une équation cartésienne de cercle . . . . . . □
- savoir déterminer les caractéristiques d'un cercle concernant une équation cartésienne . . . . . . □

I. Repérage dans le plan

Dans cette partie, on revient sur les bases de la géométrie du plan. On voit également les différents types de coordonnées : cartésiennes, polaires.

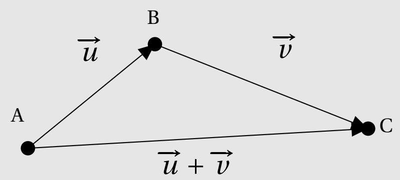
1) Vecteurs

Rappel 1. — *Un **vecteur** $\overrightarrow{u}$ non nul est la donnée de trois éléments :*

- *sa direction : la droite qui porte le vecteur.*
- *son sens : on oriente la droite (de A vers B pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$.*
- *une longueur, appelée **norme**, et notée $||\overrightarrow{u}||$ (la longueur AB pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$).*

*On définit un vecteur de longueur 0, appelé **vecteur nul**, et noté $\overrightarrow{0}$.*

Rappel 2 (Addition de deux vecteurs). — *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. On introduit trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v}$. On définit alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.*

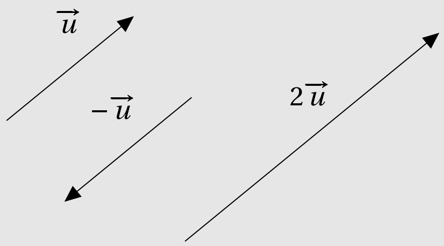


Proposition 4.1. Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C du plan, on a

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Rappel 3 (Multiplication par un scalaire). — *Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan, et k un réel. On définit le vecteur $k\overrightarrow{u}$ comme le vecteur ayant la même direction que $\overrightarrow{u}$, le même sens si $k > 0$, le sens contraire si $k < 0$, et de norme $|k|.||\overrightarrow{u}||$.*



Définition 1. — L'ensemble des vecteurs du plan, muni de l'addition et la multiplication par un scalaire, vérifie certaines propriétés :

- le vecteur nul est le neutre de l'addition : $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$.
- l'addition est commutative : $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.
- l'addition est associative : $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.
- tout vecteur admet un opposé : $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$.
- 1 est le neutre de la multiplication : $1.\vec{u}=\vec{u}$.
- la multiplication est distributive sur l'addition :

$$k.(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v} \quad \text{et} \quad (k+k').\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$$

Les quatre premières propriétés font de l'espace des vecteurs, muni de l'addition, un **groupe abélien**. L'ensemble de ces propriétés forme un **espace vectoriel**. Nous y reviendrons plus tard cette année.

Rappel 4. — *Deux vecteurs du plan $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$ ou $\vec{v}=k\vec{u}$.*

Remarque 1. —

— Deux vecteurs colinéaires ont donc la même direction.

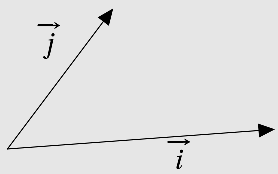
— Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan.

Définition 2. — Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On dit que la famille $(\vec{u};\vec{v})$ est **libre** si les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Sinon, on dit que la famille est **liée**.

2) Base du plan et repère

Définition 3. — On appelle **base** du plan la donnée de deux vecteurs $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ non colinéaires.
On dit que la base est

- **orthogonale** si et seulement si $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux.
- **orthonormée** ou orthonormale si et seulement si elle est orthogonale, et si $||\vec{\imath}||=||\vec{\jmath}||$.



Proposition 4.2.

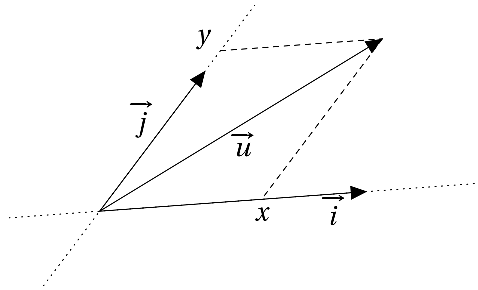
Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base du plan. Alors pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe deux réels uniques x et y tels que

$$\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$$

x est appelé **abscisse** de $\vec{u}$, y est appelé **ordonnée** et (x,y) représente les **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$

dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On notera

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{u}\,(x;y)$$



Définition 4 (Repère)**.** — On appelle **repère** du plan la donnée d'un point O, appelé **origine** du repère, et d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Le repère est dit orthogonal si la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthogonale, et orthonormé si la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormée.

Proposition 4.3.

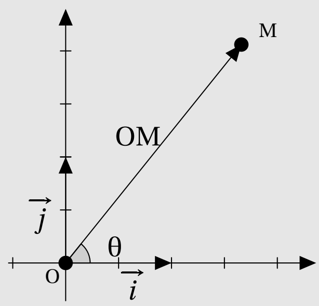
Soit $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan. Pour tout point A du plan, il existe deux réels x et y uniques vérifiant

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

x est appelé abscisse du point A, y ordonnée du point A. Le couple $(x;y)$ représente les **coordonnées cartésiennes** de A, et on note $\mathrm{A}(x;y)$.

3) Coordonnées polaires

Définition 5. — Soit $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan. Soit M un point du plan, distinct de l'origine. M est uniquement déterminé par une mesure de l'angle $\theta = (\vec{\imath}; \overrightarrow{\mathrm{OM}})$ et par la longueur OM.



Ainsi, (OM, θ) identifie M, et représente les **coordonnées polaires** du point M.
Le point O n'a pas de coordonnées polaires.

Remarque 2. — Dans le plan complexe $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$, si M (distinct de l'origine) a pour forme exponentielle $re^{i\theta}$, alors (r, θ) représente des coordonnées polaires de M.

Proposition 4.4.

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé, et M un point distinct de O.

- Si M a pour coordonnées cartésiennes $(x; y)$ alors $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et θ, identifié par $\cos(\theta) = \frac{x}{r}$ et $\sin(\theta) = \frac{y}{r}$ forme les coordonnées polaires de M.
- Réciproquement, si M a pour coordonnées polaires (r,θ) alors $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ représentent les coordonnées cartésiennes de M.

Démonstration. En se plaçant dans le plan complexe, on revient à la conversion forme algébrique / forme exponentielle, vue dans le chapitre 3. □

Exercice 1. — Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé. Soit A de coordonnées cartésienne $(2; -2)$ et B de coordonnées polaire $\left(2; \frac{\pi}{6}\right)$. Déterminer les coordonnées polaires de A et les coordonnées cartésiennes de B.

Solution. On note $r = OA$. Alors $r = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Enfin, θ vérifie

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} \ [2\pi]$$

Ainsi, $\left(2\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$ représente les coordonnées polaires de A.
Enfin, $x_B = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ et $y_B = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ représentent les coordonnées cartésiennes de B.

II. Produit scalaire

Dans l'ensemble de cette partie, $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ représente un repère orthonormé direct.

1) Définitions

Définition 6. — Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et on note $\vec{u}\cdot\vec{v}$, le nombre réel

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\cos(\vec{u}; \vec{v})$$

Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ sont nuls, on pose $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Exemple 1. — Puisque $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormé, on a

$$\vec{\imath}\cdot\vec{\imath} = ||\vec{\imath}||.||\vec{\imath}||.\cos(\vec{\imath}; \vec{\imath}) = 1, \quad \vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath} = ||\vec{\jmath}||.||\vec{\jmath}||.\cos(\vec{\jmath}; \vec{\jmath}) = 1 \quad \text{et} \quad \vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = ||\vec{\imath}||.||\vec{\jmath}||.\cos(\vec{\imath}; \vec{\jmath}) = 0$$

Propriété 1. — *Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a*

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = ||\vec{u}||^2$$

Solution. En effet,

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{u} &= ||\vec{u}||.||\vec{u}||.\cos(\underbrace{\vec{u}\,;\vec{u}}_{=0\ [2\pi]})\\ &= ||\vec{u}||^2\end{aligned}$$

Proposition 4.5.

On dispose des définitions équivalentes suivantes. Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, on a

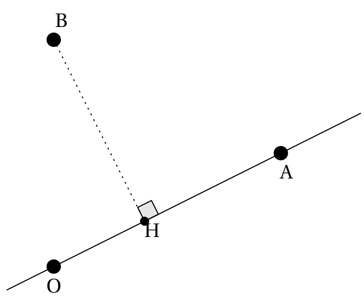
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$.
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2}{2}$.

Exemple 2. — Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ deux vecteurs. Déterminer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Solution. On a $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times3+1\times4 = 10$.

Proposition 4.6.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Soient A et B deux points du plan, tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. On note H le projeté orthogonal de B sur (OA).



Alors, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \mathrm{OA}\times\mathrm{OH}$ si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont dans le même sens, $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\mathrm{OA}\times\mathrm{OH}$ sinon.
On notera

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OH}}$$

Exemple 3. — Soit ABCD un carré de centre O. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}$.

Solution. Le projeté orthogonal de O sur la droite (AB) est le point I milieu de [AB]. Alors

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO} = \mathrm{AB}\times\mathrm{AI} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}^2$$

Propriété 2. — *Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$, on a :*

- *Symétrie :* $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$.
- *Bilinéarité :* $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$ *et* $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$.

2) Applications géométriques

Proposition 4.7.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Proposition 4.8.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = ||\vec{u}||.||\vec{v}||$.

Méthode 4.1.

Pour déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u};\vec{v})$, on détermine le produit scalaire de deux manières différentes : avec les coordonnées, et avec la définition. Cela permet d'obtenir $\cos(\vec{u};\vec{v})$.

Exemple 4. — Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$. Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u};\vec{v})$.

Solution. D'une part, on a

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times\frac{1}{2}+1\times\frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

D'autre part, par définition

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\cos(\vec{u};\vec{v})$$

avec

$$||\vec{u}|| = \sqrt{5} \quad \text{et} \quad ||\vec{v}|| = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Ainsi,

$$\frac{\sqrt{5}\sqrt{10}}{2}\cos(\vec{u};\vec{v}) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{2}}{2}\cos(\vec{u};\vec{v}) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \cos(\vec{u};\vec{v}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ainsi, $(\vec{u};\vec{v}) = \pm\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$. D'après l'orientation, on en déduit donc que $(\vec{u};\vec{v}) = \frac{\pi}{4}$

Remarque 3. — Pour conclure, il manque une information de signe (pour déterminer une mesure de l'angle). On va donc introduire la notion de déterminant.

III. Déterminant dans une base orthonormée directe

Dans l'ensemble de cette partie, $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ représente un repère orthonormé direct.

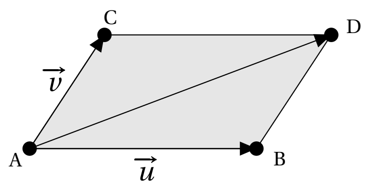
1) Définition

Définition 7. — Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. On appelle **déterminant**, et on note $[\vec{u},\vec{v}]$, le nombre réel

$$[\vec{u},\vec{v}] = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\sin(\vec{u};\vec{v})$$

Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ sont nuls, on pose $[\vec{u},\vec{v}] = 0$.
On le note également $\det(\vec{u},\vec{v})$.

Remarque 4. — Soient A, B, C et D quatre points du plan, tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et ABDC est un parallélogramme.



Alors $[\vec{u},\vec{v}]$ représente l'aire du parallélogramme ABDC.

Proposition 4.9. Avec coordonnées

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. Alors

$$[\vec{u},\vec{v}] = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Exemple 5. — Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ deux vecteurs. Déterminer $[\vec{u},\vec{v}]$.

Solution. On a $[\vec{u},\vec{v}] = 2 \times 4 - 3 \times 1 = 5$.

2) Propriétés

Propriété 3. — *Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$, on a :*

- *Antisymétrie :* $[\vec{v},\vec{u}] = -[\vec{u},\vec{v}]$.
- *Bilinéarité :* $[(\vec{u}+\vec{v}),\vec{w}] = [\vec{u},\vec{w}] + [\vec{v},\vec{w}]$ *et* $[\vec{u},(\vec{v}+\vec{w})] = [\vec{u},\vec{v}] + [\vec{u},\vec{w}]$.

Proposition 4.10.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $[\vec{u},\vec{v}] = 0$.

Démonstration.

- Si $[\vec{u},\vec{v}] = 0$, alors soit $||\vec{u}|| = 0$, et donc $\vec{u} = \vec{0}$; soit $||\vec{v} = 0||$, et donc $\vec{v} = \vec{0}$; soit $\sin(\vec{u};\vec{v}) = 0$, c'est-à-dire $(\vec{u};\vec{v}) = 0\ [\pi]$. Dans tous les cas, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- Réciproquement, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, soit $||\vec{u}|| = 0$ ou $||\vec{v}|| = 0$, soit $(\vec{u};\vec{v}) = 0\ [\pi]$, c'est-à-dire $\sin(\vec{u};\vec{v}) = 0$: ainsi, dans tous les cas $[\vec{u};\vec{v}] = 0$.

□

IV. Droites

1) Définitions

Définition 8. — Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan, et A et B deux points distincts du plan. On appelle :

- **droite vectorielle** dirigée par $\vec{u}$ l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{u}$:
$$\mathscr{D}_{\vec{u}} = \{\lambda\vec{u}\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$
- **droite** (ou **droite affine**) passant par A et dirigée par $\vec{u}$ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires :
$$\mathscr{D}_{A,\vec{u}} = \left\{ \text{M du plan}, \quad \exists\,\lambda \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} \right\}$$
$\vec{u}$ est appelé **vecteur directeur** de la droite.
- droite passant par A et B la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{AB}$.

Définition 9 (Vocabulaire)**.** —

- Des points sont dits **alignés** s'ils sont sur une même droite.
- Deux droites sont dites **parallèles** si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
- Deux droites sont **perpendiculaires** si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Remarque 5. — A partir de ces définitions, on peut redémontrer les résultats connus, par exemple que si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Définition 10. — Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. On appelle **vecteur normal** de la droite $\mathscr{D}$ tout vecteur orthogonal à $\vec{u}$.

2) Représentations cartésiennes et paramétriques

Théorème 4.11.

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par $A(x_A; y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. $M(x; y)$ est sur la droite $\mathscr{D}$ si et seulement si $b(x - x_A) - a(y - y_A) = 0$.
Cette écriture est appelée **équation cartésienne** de la droite $\mathscr{D}$.

Réciproquement, un ensemble ayant pour équation $ax + by + c = 0$ est une droite, de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Démonstration. Par définition, M est sur la droite $\mathscr{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, et donc si et seulement si $[\overrightarrow{AM}\,, \vec{u}\,] = 0$. Cela donne donc

$$(x - x_A)b - (y - y_A)a = 0$$

La réciproque se fait également aisément, en prenant un point quelconque de la droite. □

Méthode 4.2.

Pour déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A(x_A; y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on écrit son équation sous la forme $bx - ay + c = 0$ et on cherche c avec les coordonnées de A.

Exemple 6. — Déterminer une équation cartésienne de la droite, passant par $A(1;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Solution. Cette droite $\mathscr{D}$ a pour équation

$$2x - y + c = 0 \quad \text{avec} \quad 2 - 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -1$$

et donc $2x - y + 1 = 0$ est une équation cartésienne de $\mathscr{D}$.

Méthode 4.3.

Pour déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A(x_A; y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on écrit son équation sous la forme $ax + by + c = 0$ et on cherche c avec les coordonnées de A.

Exemple 7. — Déterminer une équation cartésienne de la droite, passant par $A(1;1)$ et de vecteur normal $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Solution. Cette droite $\mathscr{D}$ a pour équation

$$x + 2y + c = 0 \quad \text{avec} \quad 1 + 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -3$$

et donc $x + 2y - 3 = 0$ est une équation cartésienne de $\mathscr{D}$.

Théorème 4.12.

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par $A(x_A; y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ non nul. Alors $M(x; y)$ est sur la droite $\mathscr{D}$ si et seulement si

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \end{cases} \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}$$

Cette représentation est appelée **système d'équations paramétriques**.

Démonstration. $M(x; y)$ est sur la droite $\mathscr{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, ce qui s'écrit

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \end{cases} \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}$$

□

Exemple 8. — Soit $\mathscr{D}$ la droite, passant par $\mathrm{A}(1;2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Alors $\mathscr{D}$ a comme système d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 2-t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

Rappel 5. — *On appelle **médiatrice** du segment* $[\mathrm{AB}]$ *l'ensemble des points* M *a égale distance de* A *et* B.

Exercice 2. — Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[\mathrm{AB}]$, avec $\mathrm{A}(1;2)$ et $\mathrm{B}(-1;4)$.

Solution. $\mathrm{M}(x;y)$ est sur la médiatrice du segment $[\mathrm{AB}]$ si et seulement si $\mathrm{AM}=\mathrm{BM}$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathrm{AM}=\mathrm{BM} &\Leftrightarrow \mathrm{AM}^2=\mathrm{BM}^2 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=(x+1)^2+(y-4)^2 \\ &\Leftrightarrow -4x+4y-12=0 \end{aligned}$$

Ainsi, une équation cartésienne de la médiatrice de $[\mathrm{AB}]$ est $-x+y-3=0$.

3) Intersection de deux droites

Proposition 4.13.

Deux droites peuvent avoir 0 (cas des droites parallèles), 1 (cas des droites sécantes) ou une infinité (cas des droites confondues) points d'intersection.

Méthode 4.4.

Pour déterminer l'intersection éventuelle de deux droites on peut utiliser

- Deux équations cartésiennes, et résoudre le système obtenu pour obtenir $(x;y)$;
- Une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques, et on injecte pour déterminer t.

On peut également utiliser deux systèmes d'équations paramétriques et obtenir les valeurs de t et t'.

Exemple 9. — Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites d'équations cartésiennes respectives $x+y+3=0$ et $-x+2y-6=0$. Déterminer les intersections éventuelles de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Solution. $\mathrm{M}(x;y)$ est sur l'intersection si et seulement si

$$\begin{cases} x+y+3=0 \\ -x+2y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3=0 \\ 3y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$$

Ainsi, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont un unique point d'intersection : $\mathrm{A}(-4;1)$.

Exemple 10. — Soient $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $x+2y+1=0$ et $\mathscr{D}'$ de système d'équations paramétriques $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2-t \\ y & = & 1+t \end{array}\right.$. Déterminer les intersections éventuelles de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Solution. M(x; y) est sur l'intersection si et seulement si

$$\begin{aligned}(2-t)+2(1+t)+1=0 &\Leftrightarrow 5+t=0\\ &\Leftrightarrow t=-5\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont un unique point d'intersection : $x=2-(-5)=7$ et $y=1-5=-4$.

4) Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Méthode 4.5.

Pour déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point A sur une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, on cherche M(x; y) sur la droite vérifiant $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{u}=0$.

Exemple 11. — Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point A(1; 1) sur la droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $x+y-3=0$.

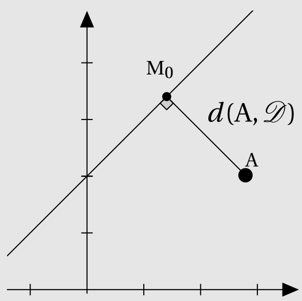
Solution. Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$. On cherche M($x$; y) vérifiant $x+y-3=0$ et tel que $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{u}=0$, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-3=0 \\ (x-1)(-1)+(y-1)1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y-3=0 \\ -x+y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

Ainsi B$\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$.

5) Distance d'un point à une droite

Définition 11. — Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan, et A un point. On appelle **distance** de A à la droite $\mathscr{D}$, et on note $d(\mathrm{A},\mathscr{D})$, la distance AM_0, où M_0 est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$.



Théorème 4.14.

Soit $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}; y_\mathrm{A})$ un point du plan, et $\mathscr{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$. Alors

$$d(\mathrm{A},\mathscr{D}) = \frac{|ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Démonstration. Notons $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$. Par définition, $\overrightarrow{\mathrm{AM}_0}$ et le vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sont colinéaires, et donc

$$|\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{A}}\cdot\vec{n}| = \mathrm{M}_0\mathrm{A}||\vec{n}||$$

Ainsi,

$$d(\mathrm{A},\mathscr{D}) = \mathrm{M}_0\mathrm{A} = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{A}}\cdot\vec{n}|}{||\vec{n}||}$$

Or, $\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{A}}\cdot\vec{n} = (x_\mathrm{A}-x_0)a+(y_\mathrm{A}-y_0)b = ax_\mathrm{A}+bx_\mathrm{B}-(ax_0+bx_0)$. Or, puisque $\mathrm{M}_0\in\mathscr{D}$, $ax_0+bx_0+c=0$. Ainsi

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{A}}\cdot\vec{n} = ax_\mathrm{A}+bx_\mathrm{B}+c$$

et $||\vec{n}|| = \sqrt{a^2+b^2}$, ce qui donne le résultat. □

Exemple 12. — Déterminer la distance du point A(1;2) à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $2x+3y-7=0$.

Solution. On a

$$d(\mathrm{A},\mathscr{D}) = \frac{|2\times1+3\times2-7|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

V. Cercles

1) Définition

Définition 12. — Soit A un point du plan. Le **cercle** $\mathscr{C}_{\mathrm{A},r}$ de centre A et de rayon $r\geqslant 0$ est l'ensemble des points du plan à une distance r de A :

$$\mathscr{C}_{\mathrm{A},r} = \{\mathrm{M}\text{ du plan, } \mathrm{AM}=r\}$$

Remarque 6. — Soit $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}; y_\mathrm{A})$ un point du plan. $\mathrm{M}(x;y)$ est sur le cercle, de centre A et de rayon r si et seulement si $\mathrm{AM}=r$, c'est-à-dire

$$(x-x_\mathrm{A})^2+(y-y_\mathrm{A})^2 = r^2$$

Cette écriture est appelée **équation cartésienne** du cercle.

Définition 13 (Equation cartésienne)**.** — Tout cercle du plan admet une équation du type $x^2+y^2+ax+by+c=0$. Réciproquement, tout ensemble admettant une équation du type $x^2+y^2+ax+by+c=0$ est un cercle.

Exemple 13. — Le cercle de centre A(1; 1) et de rayon 1 a pour équation cartésienne $(x-1)^2+(y-1)^2 = 1^2$, c'est-à-dire $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$.

2) Méthodes

Méthode 4.6.

Connaissant le centre A et le rayon r d'un cercle, pour déterminer une équation cartésienne, on dit que $\mathrm{M}(x; y)$ est sur le cercle si et seulement si $\mathrm{AM}^2 = r^2$. On en déduit alors une équation cartésienne.

Exemple 14. — Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A(1;2) et de rayon 4. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}$.

Solution. $\mathrm{M}(x; y) \in \mathscr{C}$ si et seulement si $\mathrm{AM}^2 = r^2$, et donc

$$\begin{aligned}\mathrm{AM}^2 = r^2 &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2 = 4^2\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-4y-11=0\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ est donc $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$.

Méthode 4.7.

Connaissant une équation cartésienne d'un cercle, on obtient le centre et le rayon en utilisant la forme canonique sur les termes de la forme $x^2 + ax$ et $y^2 + bx$. On en déduira alors centre et rayon.

Exemple 15. — Soit $\mathscr{C}$ le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$. Déterminer son centre et son rayon.

Solution. On factorise :

$$\begin{aligned}x^2+y^2+2x-6y+6=0 &\Leftrightarrow x^2+2x+y^2-6y+6=0\\ &\Leftrightarrow (x+1)^2-1+(y-3)^2-9+6=0\\ &\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=4=2^2\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{C}$ est le cercle de centre A(−1;3) et de rayon 2.

Proposition 4.15.

Soient A et B deux points distincts. Alors l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].

Méthode 4.8.

Lorsqu'on connait les coordonnées des extrémités d'un diamètre, on utilise la proposition précédente pour déterminer une équation cartésienne.

Exemple 16. — Soient $A(1;2)$ et $B(-2;-3)$ deux points du plan. Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$.

Solution. $M(x;y) \in \mathscr{C}$ si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 &\Leftrightarrow (x-1)(x+2)+(y-2)(y+3)+0\\ &\Leftrightarrow x^2+x-2+y^2+y-6=0\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+x+y-8=0\end{aligned}$$

Ainsi, une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ est $x^2+y^2+x+y-8=0$.

VI. Triangles et quadrilatères

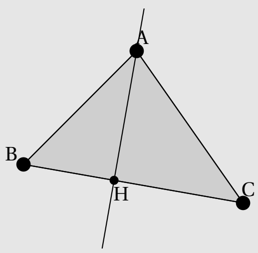
1) Triangle

Rappel 6. — *Un triangle* ABC *est dit*

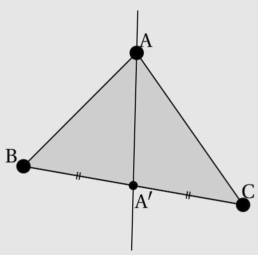
- ***rectangle*** *en* A *si* $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. *Le côté* $[BC]$ *est alors appelé hypoténuse.*
- ***isocèle*** *en* A *si* $AB = AC$*, ce qui équivaut à* $\widehat{ABC} = \widehat{BCA}$.
- ***équilatéral*** *si* $AB = AC = BC$*, ce qui équivaut à* $\widehat{ABC} = \widehat{BCA} = \widehat{BAC}$.
- ***plat*** *si* A, B *et* C *sont alignés.*

Rappel 7. — ABC *désigne un triangle.*

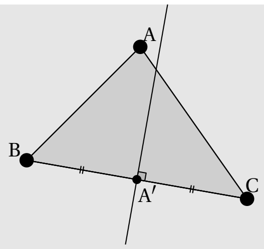
- *La* ***hauteur*** *issue de* A *est la droite passant par* A *et perpendiculaire à* (BC). *Le pied* H *de la hauteur issue de* A *est le point d'intersection de la hauteur issue de* A *avec* (BC).



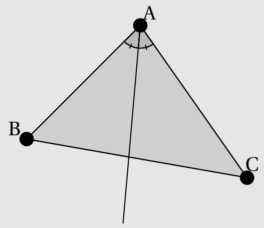
- *La* ***médiane*** *issue de* A *est la droite passant par* A *et par le milieu* A′ *du segment* $[BC]$.



- *La* ***médiatrice*** *du segment* $[BC]$ *est la droite passant par le milieu* A′ *de* $[BC]$ *et perpendiculaire à* (BC).

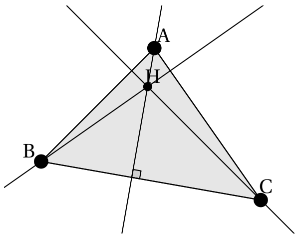


- *Une* ***bissectrice*** *de l'angle* $\widehat{\mathrm{BAC}}$ *est une demi-droite passant par* A *divisant l'angle* $\widehat{\mathrm{BAC}}$ *en deux angles égaux.*

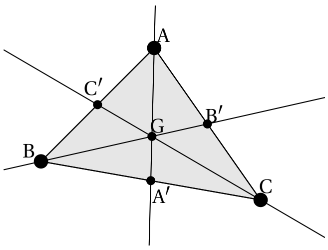


Rappel 8. — *Soit* ABC *un triangle.*

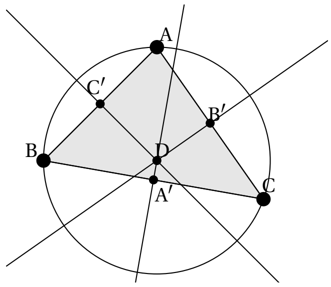
- *Les trois hauteurs sont concourantes en un point* H *appelé* ***orthocentre****.*
- *Les trois médianes sont concourantes en un point* G *appelé* ***centre de gravité****.*
- *Les trois médiatrices sont concourantes en un point* D *qui est le* ***centre du cercle circonscrit****.*
- *Les trois bissectrices intérieures sont concourantes en un point* I *qui est le* ***centre du cercle inscrit****.*



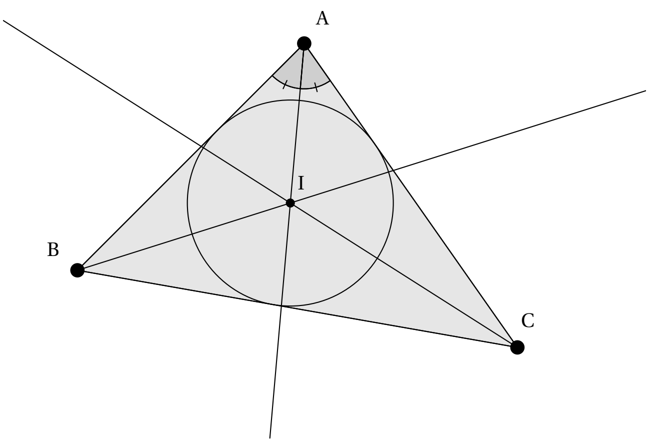
Orthocentre



Centre de gravité



Centre du cercle circonscrit



Centre du cercle inscrit

Propriété 4. —

- *Un triangle* ABC *est isocèle en* A *si et seulement si la hauteur issue de* A*, la médiatrice de* $[\mathrm{BC}]$*, la bissectrice de l'angle* $\widehat{\mathrm{BAC}}$ *et la médiane issue de* A *sont confondues.*
- *Un triangle* ABC *est rectangle en* A *si et seulement si* $[\mathrm{BC}]$ *est un diamètre de son cercle circonscrit.*

2) Quadrilatères

Rappel 9. —

- *Un* ***trapèze*** *est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles.*
- *Un* ***parallélogramme*** *est un quadrilatère* ABCD *vérifiant* $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$*, ou encore que ses diagonales se coupent en leur milieux.*
- *Un* ***losange*** *est un quadrilatère ayant tous ses côtés égaux, ou encore que ses diagonales se coupent perpendiculairement en leurs milieux.*
- *Un* ***rectangle*** *est un parallélogramme ayant un angle droit, ou encore que ses diagonales sont de même longueur et se coupent en leurs milieux.*
- *Un* ***carré*** *est un rectangle losange.*

Exercices

Dans l'ensemble des exercices, $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormé.

Équations

Exercice 3. — Déterminer une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques des droites suivantes :

1. la droite (AB), avec $A(4;-1)$ et $B(0;3)$.
2. la droite passant par $C(1;2)$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$.
3. la droite passant par $D(2;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.
4. la droite passant par $E(1;2)$ et parallèle à (FG), avec $F(3;2)$ et $G(1;-4)$.
5. la médiatrice de [AB], avec $A(2;1)$ et $B(-4;-7)$.

Exercice 4. — Déterminer une équation cartésienne, ainsi que le centre et le rayon des cercles suivants :

1. le cercle d'équation cartésienne $x^2+y^2+4x-8y+11=0$.
2. le cercle de centre $\Omega(-1;2)$ et de rayon 4.
3. le cercle de diamètre [AB], avec $A(0;1)$ et $B(2;3)$.

Triangles

Exercice 5. — Soient A, B et C trois points non alignés. On pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$. On note s l'aire du triangle ABC et p le demi périmètre du triangle $p = \frac{a+b+c}{2}$.

1. Montrer la formule d'Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{BAC})$.
2. Montrer que $s = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{BAC})$. Enoncer des formules analogues avec ab et ac.
3. Démontrer la formule des sinus :
$$\frac{a}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{b}{\sin(\widehat{ABC})} = \frac{c}{\sin(\widehat{ACB})}$$
4. Démontrer la formule de Héron :
$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Exercice 6. — Soient $A(0;1)$, $B(2;3)$ et $C(-4;-12)$. Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 7. — Soient $A(8;-7)$, $B(-4;2)$ et $C(-4;9)$. Déterminer une équation du cercle inscrit au triangle ABC.

Exercice 8. — La droite (AB) a pour équation $x-2y+3=0$, (AC) : $2x-y-3=0$ et (BC) : $x+2y+1=0$. Déterminer les coordonnées du sommet du triangle ABC, ainsi que celle de l'orthocentre.

Exercice 9. — Soient $A(1;1)$, $B(3;7)$ et $C(-1;3)$. Déterminer les coordonnées du centre de gravité, de l'orthocentre et du centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Vérifier que ces trois points sont alignés.

Remarque 7. — C'est un résultat général : ils sont alignés sur une droite appelée Droite d'Euler.

Autres

Exercice 10. — Soient $A(1;1)$, $B(3;0)$ et $C(3;3)$. Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD est un parallélogramme.
Calculer l'aire du parallélogramme, et la distance de C à la droite (AD).

Exercice 11 (Construction géométrique de l'inverse)**.** — Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. On considère $M(t;0)$, avec $t>1$.

1. Montrer que l'abscisse a d'un point de contact $P(a;b)$ de la tangente à $\mathscr{C}$ passant par M vérifie $a=1/t$.
2. Soit M un point d'abscisse $t>1$ sur une droite graduée. Décrire une construction géométrique de N d'abscisse $1/t$.
3. Soit N un point d'abscisse $0<t<1$ sur une droite graduée. Décrire une construction géométrique de M d'abscisse $1/t$.